

Title	可換コンパクト群上のHardy空間における端函数(extremal function)について(函数環に関連した諸問題(II))
Author(s)	田中, 純一
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 654: 157-165
Issue Date	1988-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/100494">http://hdl.handle.net/2433/100494</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

可換コンパクト群上の Hardy 空間における  
端函数 (extremal functions) について.

都留文科大学 田中 純一

(Jun-Ichi Tanaka)

31.  $T$  を実軸  $R$  の稠密な部分群とする.  $T$  に離散位相を  
入れて, その双対群を  $K$  とおく.  $\sigma$  を  $K$  上の正規 Haar 測度と  
し,  $f \in L^1(\sigma)$  が 解析的 とは

$$f \sim \sum_{\lambda \geq 0} a_{\lambda} \chi_{\lambda}$$

となる Fourier 展開を持つものとする. ここで  $\chi_{\lambda}$  は  $\chi_{\lambda}(x) =$   
 $x(\lambda)$ ,  $x \in K$ , で定まる指標とする.  $L^p(\sigma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , における解  
析函数全体で Hardy 空間,  $H^p(\sigma)$ , を定義し,  $f \in H^p(\sigma)$  で  $\int f(x) d\sigma$   
 $= 0$  となる函数全体を  $H_0^p(\sigma)$  と書く.  $L^p(\sigma)$  の部分空間  $M$   
が (単純) 不変 (simply invariant) とは  $T \ni \lambda (\geq 0)$  に対し  
 $\chi_{\lambda} \cdot M \subsetneq M$  となることとする.  $L^p(\sigma) \ni f$  に対し,  $\{\chi_{\lambda} f; T$   
 $\ni \lambda > 0\}$  で生成される不変部分空間を  $M_f$  と記す. 不変部分  
空間  $M$  がある  $f \in M$  に対して  $M = M_f$  を満たすとき,  $f$   
を  $M$  の 単一生成元 (single generator) と呼ぶ.

以上の設定において, 単位円周上のいくつかの性質が

拡張される。例えば  $f \in H^1(\sigma)$  で  $\log |f| \in L^1(\sigma)$  とすると inner-outer 分解が可能である。しかしある程度の隔たりがあり、 $\log |f| \notin L^1(\sigma)$  となる解析関数  $f (\neq 0)$  の存在が示される。([1; Theorem 9.3])。この種の関数に inner-outer 分解に類する分解ができるだろうか？ また全このノルム 1 の outer 関数は  $H^1(\sigma)$  の単位球の端点となる。果して逆が成立するであろうか？ この等の懸案はかなり以前よりなされ、次の問題へと集約されている。([3; Chapter 5, §4])。

単一生成元の問題。全この不変部分空間は単一生成元を持つであろうか？ 特に  $H^1_0(\sigma)$  の場合はどうか。

ここでは  $H^1_0(\sigma)$  の local product 分解による表現を用いてこの問題の周辺を探ってみる。

§2. 任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して、 $e_t(\lambda) = e^{i\lambda t}$  ( $\lambda \in \mathbb{P}$ ) となる  $e_t \in K$  が定まる。  $K \ni x$  に対し  $T_t(x) = x + e_t$  とすると  $K$  上はエルゴード的な流れが定義される。簡便のため、 $2\pi \in \mathbb{P}$  と仮定する。  $K_{2\pi}$  を  $e_1(y) = 1$  となる  $y \in K$  の全体とすると  $K_{2\pi}$  は  $K$  のコンパクト部分群となり、 $K$  は  $K_{2\pi} \times [0, 1)$  と  $B(y, \delta) = y + e_\delta$  という写像で同一視できる。  $K_{2\pi}$  上の正規 Haar 測度を  $\sigma_1$  とするとき  $\sigma$  は  $\sigma_1 \times m_1$  となる。ここで  $m_1$  は実軸上の Lebesgue 測度、 $dt$ , の  $[0, 1)$  への制

限とする.  $K$  を  $K_{2\pi} \times R$  の部分と捉えることより, 次の二つの写像を導入する.

$L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt) \ni f$  に対して

$$\Xi(f)(y, s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(y + e_j, s - j)$$

$(y, s) \in K = K_{2\pi} \times [0, 1)$  と定義する. このとき  $\Xi$  は  $L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt)$  を  $L^1(\sigma)$  上へ写す. また  $L^1(\sigma) \ni \phi$  に対して

$$\phi^\#(y, t) = \phi(y + e_{[t]}, t - [t])$$

$(y, t) \in K_{2\pi} \times R$  とする. ここで  $[t]$  は  $t$  を越えない最大の整数とする.  $\phi^\#$  は  $L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt / (1+t))$  に属する.  $\mathcal{H}^1$  を  $f \in L^1(K_{2\pi} \times R, d\sigma_1 \times dt)$  で  $\sigma_1$ -a.e.  $y \in K_{2\pi}$  に対し  $t$  の函数,  $f(y, t)$ , が実軸上の Hardy 空間,  $H^1(dt)$  に属するものの全体とする. 閉値域定理の簡単な応用から  $H_0^1(\sigma)$  を  $\mathcal{H}^1$  の商空間として表現することができる.

定理([4; Theorem 3.1]).  $\mathcal{H}^1 / \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1$  と  $H_0^1(\sigma)$  は等距離同型となる. より詳しく,  $\Xi$  は  $\mathcal{H}^1$  を  $H_0^1(\sigma)$  上に写し,

$$\|f + \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1\|_1 = \|\Xi(f)\|_1$$

が成立する.

多くの場合, 適当な  $g \in \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1$  に対して  $\|f + g\|_1 = \|\Xi(f)\|_1$  となる. 今この  $f \in \mathcal{H}^1$  に対してこれが成立するであろうか, 換言すれば  $\mathcal{H}^1 / \ker \Xi \cap \mathcal{H}^1$  のノルムは attain されるであろうか. この問題が前述の  $H_0^1(\sigma)$  に属する単一生成

元の問題と同値となる.

$H'(\sigma) \ni \phi$  に対して  $\mathcal{F}(\phi)$  を次の性質を持つ函数の全体とする.

(i)  $L^1(K_{\infty} \times \mathbb{R}, d\sigma_1 \times dt) \ni u \geq 0$  で  $0 \leq \mathfrak{I}(u) \leq 1$  となる.

(ii)  $u(y, t) \phi^{\#}(y, t)$  は  $\mathcal{H}^1$  に属する.

このとき,  $\mathcal{F}(\phi)$  は閉凸集合となり自然な順序で半順序集合となる. 簡単な考察により  $Z_{\text{non}}$  の補題の仮定をみちし, 極大元  $\bar{u}$  の存在が示される.

定理 1,  $H'_0(\sigma) \ni \phi$  に対して,  $\mathcal{F}(\phi)$  がよび  $\bar{u}$  を上記のものとする.  $\mathfrak{I}(\bar{u}) \neq 1$  となれば  $(1 - \mathfrak{I}(\bar{u}))\phi$  は  $H'_0(\sigma)$  の単一生成元となる.

この定理を示すために次の補題を用ゐる. 上半平面で有界な解析函数の境界函数全体の  $L^1(dt/(1+t^2))$  における閉包を  $H^1(dt/(1+t^2))$  と記す.

補題 1.  $H^1(dt/(1+t^2)) \ni f$  に対して,  $f$  が outer でないとする. このとき  $0 \leq u(t) \leq 1$  で

$$u \cdot f \in H^1(dt/(1+t^2)) \quad \text{かつ} \quad u f(\lambda) = 0$$

となる函数  $u$  が存在する.

証明.  $f(t) = g(t)h(t)$  と  $g$  が inner,  $h$  が outer とする  $H^1(dt/(1+t^2))$  における inner-outer 分解とする.  $g(\lambda) = 0$  のとき  $u \equiv 1$  として成立する.  $g(\lambda) \neq 0$  のとき,  $g$  を定

数値として  $0 < \langle \varphi, u \rangle < 1$  と仮定できる. 二つより  $0 < \alpha < 1$  を

適当に定めると  $1 - \alpha/2 (\langle \varphi, u \rangle + \overline{\langle \varphi, u \rangle}) = 0$  となり

$$u(t) = \frac{1}{2} \{ 1 - \alpha/2 (\langle \varphi(t) \rangle + \overline{\langle \varphi(t) \rangle}) \}$$

と定めるとよい.

補題 2. ([1; Theorem 7.8]).  $\varphi \in H_0^1(\sigma)$  とする. このとき次の (i) (ii) は同値となる.

(i)  $\sigma_1$ -a.e.  $y \in K_{2\pi}$  に対して,  $\varphi^\#(y, t)$  は  $t$  の函数として  $H^1(dt/(1+t^2))$  の outer 函数となる.

(ii)  $\varphi$  は  $H_0^1(\sigma)$  の単一生成元となる.

定理 1 の証明.  $0 \leq \alpha(\tilde{u}) \leq 1$  および  $\alpha(\tilde{u}\phi^\#) = \alpha(\tilde{u})\phi$

より,  $(1 - \alpha(\tilde{u}))\phi$  は  $H_0^1(\sigma)$  に属する.  $\varphi = (1 - \alpha(\tilde{u}))\phi$  とおく.

仮定より,  $\varphi \neq 0$  また,  $\sigma_1$ -a.e.  $y \in K_{2\pi}$  に対して,  $t$  の

函数,  $\varphi^\#(y, t)$ , は  $H^1(dt/(1+t^2))$  に属する. 補題 2 の (i)

が成立することを示す. (i) が成立しないと仮定すると  $\sigma_1$ -

a.e.  $y \in K_{2\pi}$  に対して,  $\log |\varphi(y, t)| \in L^1(dt/(1+t^2))$  より

$L^1(K_{2\pi} \times \mathbb{R}, d\sigma_1 \times dt/(1+t^2)) \ni h(y, t)$  で  $|\varphi^\#(y, t)| = |h(y, t)|$

となり,  $\sigma_1$ -a.e.  $y \in K_{2\pi}$  に対して,  $h(y, t)$  は  $t$  の函数として

$H^1(dt/(1+t^2))$  における outer 函数とできる.  $\varphi^\#(y, t) =$

$B(y, t) h(y, t)$  とすると,  $\sigma_1$ -a.e.  $y$  に対し,  $t$  の函数,  $B(y, t)$

は定数ではない inner 函数となる. 補題 1 より  $0 \leq U(y, t) \leq 1$

となる可測函数で,  $t$  の函数,  $U(y, t)\varphi(y, t)$ , が  $H^1(dt/(1+t^2))$  に

属し,  $\nabla \varphi(y, t) = 0$  となるように取れる. 適当な定数  $C > 0$  に対し  $\nabla(y, t) = C/(1+t^2) \cdot \nabla \varphi(y, t)$  と定めると  $0 \leq \nabla \leq 1$  且  $\nabla(\infty) \leq 1$ , かつ  $\nabla \varphi^\#$  が  $\mathcal{H}'$  に属する. 二れより

$$\tilde{u} \leq \tilde{u} + \nabla(1 - \nabla(\tilde{u}))^\#$$

また  $\tilde{u} + \nabla(1 - \nabla(\tilde{u}))^\# \in \mathcal{F}(\phi)$  が成立し,  $\tilde{u}$  の極大性  $\wedge$  不合理となる.

この定理を利用するために,  $\mathcal{F}(\phi)$  の定義を少し拡大し,  $\phi \in H_0^\infty(\sigma)$  に対し

$$\mathcal{F}'(\phi) = [u \in L^1(K_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}, d\sigma_1 \times dt); 0 \leq u, \text{ かつ } u\phi^\# \in \mathcal{H}']$$

$$\mathcal{F}'_K(\phi) = [\theta \in L^1(\sigma); 0 \leq \theta, \text{ かつ } \theta \cdot \phi \in H_0^1(\sigma)]$$

とおく. とともに各々の  $\mathcal{F}'$  で閉じた凸集合となる. 一方  $\phi$  を  $H_0^1(\sigma)$  の単一生成元とすると Szegő の定理の応用から, 適当な  $H^1(\sigma)$  における outer 函数  $\varphi$  が存在して, ある inner 函数  $\psi$  に対し

$$\arg \phi \varphi = \arg \psi$$

とできる. 以上より, 定理 1 から次の系を得る.

系 1. 次の (i) ~ (iii) は同値となる.

(i)  $H_0^1(\sigma)$  は単一生成元を持たない.

(ii) 全ての  $\phi \in H_0^1(\sigma)$  に対し,  $\mathcal{H}' \ni f$  で  $\nabla(f) = \phi$  となり,  $\|f\|_1 = \|\phi\|$  となるものが存在する.

(iii) 全ての  $H_0^1(\sigma)$  における inner 函数  $\psi$  に対し,

$$\Phi(\Phi'(\varphi)) = \Phi_K'(\varphi)$$

が成立する.

(iii) に関する方向で次の問題設定は興味深い.  $\varphi = \chi_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) とすると, スペクトルが  $(-\lambda, \lambda)$  に属する正値函数  $\phi \in L^1(\sigma)$  が  $f \in L^1(K_{2\pi} \times \mathbb{R})$  で  $\sigma_1$ -a.e.  $y \in K_{2\pi}$  に対し,  $t$  の函数  $f(y, t)$  のスペクトルが  $(-\lambda, \lambda)$  に属する正値函数が存在して,  $\Phi(f) = \phi$  とできるかどうか. という問題が単一生成元の存在の一つの十分条件を調べることとなる. 正の定数函数の性質との関連から, ある程度の結果を期待できるように思うのだが現時点では成立するかどうか不明である.

§3.  $K \times \mathbb{R}$  上の Borel 函数  $A$  が

$$|A(x, t)| = 1 \quad \text{かつ} \quad A(x, s+t) = A(x, s)A(x+e_s, t)$$

を満たすとき,  $A$  を コサイクル と呼ぶ. 各々の不変部分空間に対し, コサイクルが対応してくる.  $\sigma$ -a.e.  $x$  に対し,  $t$  の函数  $A(t, t)$  が  $H^1(dt/(4\pi t^2))$  の inner 函数となるとき,  $A$  を 解析的コサイクル と呼ぶ, さらに  $A(x, t)$  が Blaschke 積のとき, Blaschke コサイクル という. 全ての不変部分空間  $\mathcal{M}$  に対し適当なコニタリ-函数  $\varphi$  を定めると  $\varphi\mathcal{M}$  のコサイクルが Blaschke コサイクルとできる ([3; Theorem 26]). これより単一生成元の問題は Blaschke コサイクルの零点の  $H^1(\sigma)$  に



属する函数による実現へと転換される。上記手法を用いて、ある程度結果を得ることができる。

$B(y, t)$  を Blaschke コサイクルとする。これを  $K_{2n} \times R$  上に制限し、これに上半平面に解析的に拡張して、 $B(y, t + \lambda s)$  を  $K_{2n} \times R \times R^+$  上の函数とみなし、次の条件を考へる。

(3.1) ある正数  $M > 0$  に対し、 $K_{2n} \ni y$  について、 $0 \leq t < 1$  における  $B(y, t + \lambda s)$  の零点は高々 1 個となり、 $[0, 1) \times (0, M)$  に含まれる。

補題 3. Blaschke コサイクル  $B$  が (3.1) を満たすとする。このとき inner 函数  $\phi$  が定まり  $B(y, t + \lambda s)$  の零点と  $\phi^\#(y, t + \lambda s)$  の零点は一致する。即ち  $B = \pi \phi \cdot \bar{\phi}$  となる。

証明の概略. (3.1) の性質から  $H^1(\sigma) \ni \gamma$  で  $\gamma(0) \neq 0$  となり  $\gamma^\#(y, t + \lambda s)$  の零点は  $B(y, t + \lambda s)$  の零点を含む函数  $\gamma$  が作れる。定理 1 の証明と同様な方法で  $0 \leq v \leq 1$  となる函数で  $\phi = v\gamma$  が題意を満たすように定まる。

補題 4. 任意の Blaschke コサイクル  $B$  に対し、(3.1) を満たす Blaschke コサイクルの列  $\{B_m\}$  が定まり

$$B = \prod_{m=1}^{\infty} B_m$$

と表せる。

以上の準備のもとに次の定理が示される。

定理 2.  $H^1_0(\sigma) \ni \phi$  が  $\log |\phi| \in L^1(\sigma)$  となり  $\mu\phi$  の

Blaschke コサイクルを持つとする。このとき  $0 \leq v_m \leq 1$  となる  
 数列  $\{v_m\}$  で次の性質を満たすものが定まる。

$$(i) \quad v_m \geq v_{m+1},$$

$$(ii) \quad \mathcal{M}_{v_{m+1}}\phi \supset \mathcal{M}_{v_m}\phi,$$

$$(iii) \quad \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{v_n}\phi = H_0'(\phi).$$

換言すれば  $v_n\phi$  は  $H_0'(\phi)$  の単一生成元に限りに近く近づく。

## 文 献

- [1] T. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall, 1969.
- [2] H. Helson, Structure of Blaschke cocycles, Studia Math.  
44, 1972, 493-500.
- [3] ———, Analyticity on compact abelian groups, Algebras  
in analysis, Academic Press, 1975, 1-62.
- [4] J.-I. Tanaka, Hardy spaces and BMO-functions induced by  
ergodic flows, Michigan Math. J. 32, 1985, 335-348.